Erweiterter Grundkompetenz-Katalog

AHS Oberstufe

Lehrplangruppe Mathematik AHS - Modulare Oberstufe, Stand 2013-09-24

Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (AG)

Bildungstheoretische Orientierung

Die Algebra ist die Sprache der Mathematik, in der zugleich auch zwei zentrale Ideen der Mathematik besonders deutlich sichtbar werden: Generalisierung und operative Beweglichkeit. Variable lenken die Aufmerksamkeit von speziellen Zahlen hin zu einer definierten Menge von Zahlen (oder anderen mathematischen Objekten), definierte Operationen ermöglichen es, Variable miteinander zu verknüpfen und so Beziehungen zwischen ihnen darzustellen, und schließlich stellt die Algebra ein System von Regeln zur formal-operativen Umformung derartiger Beziehungen zur Verfügung, wodurch weitere Beziehungen sichtbar werden.

Für das Betreiben von Mathematik ebenso wie für die Kommunikation und Reflexion mit und über Mathematik ist ein verständiger Umgang mit grundlegenden Begriffen und Konzepten der Algebra unerlässlich. Dies betrifft insbesondere verschiedene Zahlenbereiche, Variable, Terme, Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen sowie Gleichungssysteme. Ein verständiger Umgang umfasst eine angemessene Interpretation dieser Begriffe und Konzepte im jeweiligen Kontext ebenso wie eine zweckmäßige Verwendung dieser Begriffe und Konzepte zur Darstellung abstrakter Sachverhalte und deren regelhafte Umformung. Aber auch Reflexionen über Lösungsmöglichkeiten bzw. -fälle sowie die (Grenzen und das Ausloten der) Anwendbarkeit der jeweiligen Konzepte sind in entsprechenden Kommunikationssituationen von Bedeutung.

Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Zahlentupel (Vektoren) und die Festlegung von zweckmäßigen Regeln zur operativen Verknüpfung dieser neuen mathematischen Objekte führt zu einer wichtigen Verallgemeinerung des Zahl- bzw. Variablenbegriffs und zur mehrdimensionalen Algebra.

Durch die Einführung von Koordinaten ist es möglich, Punkte in der Ebene oder im Raum so zu verorten, dass geometrische Objekte algebraisch durch Vektoren beschrieben werden können, und sich so von rein geometrisch-anschaulichen Betrachtungsweisen (mit Winkel, Länge oder Volumen) zu lösen und geometrische Probleme mit Hilfe der Algebra zu behandeln.

Dieser Zusammenhang zwischen Algebra und Geometrie ermöglicht es aber nicht nur, geometrische Sachverhalte mit algebraischen Mitteln darzustellen (z. B. Vektoren als algebraische Darstellung von Pfeilen oder Punkten) und zu bearbeiten, sondern auch umgekehrt algebraische Sachverhalte geometrisch zu deuten (z. B. Zahlentripel als Punkte oder Pfeile im Raum) und daraus neue Einsichten zu gewinnen. Solche Deutungen algebraischer Objekte in der Geometrie wie auch Darstellungen geometrischer Objekte in der Algebra und ein flexibler Wechsel zwischen diesen Darstellungen bzw. Deutungen sind in verschiedensten Kommunikationssituationen – und somit bildungstheoretisch – von großer Bedeutung.

In der Trigonometrie interessieren vor allem Beziehungen im rechtwinkeligen Dreieck, allenfalls Erweiterungen auf allgemeine Dreiecke. Elementare Beziehungen dieser Art sollten gekannt, komplexere geometrische Zusammenhänge auf diese elementaren Beziehungen zurückgeführt werden können.

Inhaltsbereich Algebra und Geometrie (AG)

Grundkompetenzen

AG 1 **Grundbegriffe der Algebra**

AG-M 1.1 Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ verständig einsetzen können

AG-M 1.2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme, Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

Anmerkung: Im Vordergrund steht das Kennen von Mengenbezeichnungen und Teilmengenbeziehungen, das Angeben und Zuordnen von Elementen. Die reellen Zahlen sollen als Grundlage kontinuierlicher Modelle erkannt werden.
. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über $\mathbb{R}$ hinausgehen.

Algebraische Begriffe sollen anhand von einfachen Beispielen beschrieben/erklärt und verständig verwendet werden können.

AG-L 1.3 Mit exakten Werten, Näherungswerten und Zehnerpotenzen bewusst und sinnvoll umgehen können

AG-L 1.4 Zahlen im dekadischen und in einem nichtdekadischen Zahlensystem darstellen können

AG-L 1.5 Komplexe Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene darstellen und mit komplexen Zahlen rechnen können.

AG 2 **(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme**

AG-M 2.1 Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können

AG-M 2.2 Lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können

AG-M 2.3 Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

AG-M 2.4 Lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können

AG-M 2.5 Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

Anmerkung: Einfache Terme können auch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Sinus etc. beinhalten. Umformungen von Termen, Formeln oder Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen beschränken sich auf Fälle geringer Komplexität.

AG-L 2.6 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen (einschließlich natürlicher Logarithmen) definieren können, entsprechende Rechenregeln kennen und anwenden können

AG-L 2.7 Rechenregeln für Ungleichungen kennen und anwenden können

AG-L 2.8 Lineare Gleichungssysteme in drei Variablen lösen können

AG-L 2.9 Lösungsverfahren für Gleichungen vom Grad 3 oder 4 mittels Herausheben, Zerlegen, Substituieren oder Abspalten von Linearfaktoren kennen

AG-L 2.10 Den Fundamentalsatz der Algebra kennen und seine Bedeutung für Zahlenbereichserweiterungen erläutern können

AG 3 Vektoren und analytische Geometrie

AG-M 3.1 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können

AG-M 3.2 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können

AG-M 3.3 Definition der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können

AG-M 3.4 Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können

AG-M 3.5 Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

Anmerkung: Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichung dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.

Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $a \cdot b = 0$. Geraden sollen in Parameterform, in $\mathbb{R}^2$ auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.

AG-L 3.6 Die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts kennen und den Winkel zwischen zwei Vektoren ermitteln können

AG-L 3.7 Einheitsvektoren ermitteln, verständig einsetzen und interpretieren können

AG-L 3.8 Definition des Vektorprodukts und seine geometrische Bedeutung kennen

AG-L 3.9 Wissen, wodurch Ebenen festgelegt sind und Ebenengleichungen aufstellen können

AG-L 3.10 Lagebeziehungen und Abstände im Raum ermitteln können

AG 4 Trigonometrie

AG-M 4.1 Definitionen von Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke einsetzen können

AG-M 4.2 Definitionen von Sinus und Cosinus für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können

Anmerkung: Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.

AG-L 4.3 Einfache Berechnungen an allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (trigonometrische Flächenformel, Sinus- und Cosinussatz) durchführen können.

AG-L 4.4 Polarkoordinaten kennen und einsetzen können

AG 5 Nichtlineare analytische Geometrie

AG-L 5.1 Kegelschnitte in der Ebene durch Gleichungen beschreiben können; aus der Kreisgleichung Mittelpunkt und Radius bestimmen können

AG-L 5.2 Lagebeziehung Kegelschnitt – Gerade rechnerisch und zeichnerisch ermitteln können

AG-L 5.3 Kugeln im Raum durch Gleichungen beschreiben können

AG-L 5.4 Einfache Kurven in der Ebene und im Raum durch Parameterdarstellungen beschreiben können

Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten (FA)

Bildungstheoretische Orientierung

Wenn Expertinnen und Experten Mathematik verwenden, bedienen sie sich oftmals des Werkzeugs der Funktionen. Für eine verständige Kommunikation ist es daher notwendig, mit der spezifischen funktionalen Sichtweise verständig und kompetent umzugehen. Das meint, die Aufmerksamkeit auf die Beziehung zwischen zwei (oder mehreren) Größen in unterschiedlichen Kontexten fokussieren zu können sowie die gängigen Darstellungsformen zu kennen und mit ihnen flexibel umgehen zu können.

Im Zentrum des mathematischen Grundwissens stehen dann die für Anwendungen wichtigsten Funktionstypen: Namen und Gleichungen kennen, typische Verläufe von Graphen (er)kennen, zwischen den Darstellungsformen wechseln, charakteristische Eigenschaften wissen und im Kontext deuten (können).

Insgesamt sind eher kommunikative Handlungen (Darstellen, Interpretieren, Begründen) bedeutsam, manchmal können auch konstruktive Handlungen (Modellbildung) hilfreich sein; mathematisch-operative Handlungen hingegen sind in Kommunikationssituationen von eher geringer Bedeutung.

Darüber hinaus ist (Reflexions-)Wissen um Vor- und Nachteile der funktionalen Betrachtung sehr wichtig. Hilfreich ist in diesem Zusammenhang das Wissen über unterschiedliche Typen von Modellen (konstruktive, erklärende, beschreibende) sowie deren Bedeutung und Verwendung.

Wenn die wichtigsten Funktionstypen überblickt werden und wichtige Eigenschaften für das Beschreiben von Funktionen bekannt sind (Monotonie, Monotoniewechsel, Wendepunkte, Periodizität, Nullstellen, Polstellen), ist die Kommunikation auch auf zunächst unbekannte Funktionen bzw. Kompositionen von Funktionen erweiterbar.

Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten (FA)

Grundkompetenzen

FA 1 Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

FA-M 1.1 Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann

FA-M 1.2 Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und dem Funktionstyp zuordnen können

FA-M 1.3 Zwischen tabellarischen und graphischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können

FA-M 1.4 Aus Tabellen, Graphen[1] und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA-M 1.5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen

FA-M 1.6 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen graphisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können

FA-M 1.7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können

FA-M 1.8 Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können

FA-M 1.9 Einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können

Anmerkung: Auf eine sichere Unterscheidung zwischen funktionalen und nichtfunktionalen Zusammenhängen wird Wert gelegt, auf theoretisch bedeutsame Eigenschaften (z. B. Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit) wird aber nicht fokussiert.

Im Vordergrund steht die Rolle von Funktionen als Modelle und die verständige Nutzung grundlegender Funktionstypen und deren Eigenschaften sowie der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (auch $f: A \to B, x \mapsto f(x)$).

Die Bearbeitung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen beschränkt sich auf die Interpretation der Funktionsgleichung im jeweiligen Kontext sowie auf die Ermittlung von Funktionswerten.

Das rechnerische Ermitteln von Schnittpunkten von Funktionen beschränkt sich auf jene Fälle, die durch die im Inhaltsbereich Algebra und Geometrie angeführten Grundkompetenzen abgedeckt sind (lineare, quadratische Gleichungen).

Der Verlauf von Funktionen soll nicht nur mathematisch beschrieben, sondern auch im jeweiligen Kontext gedeutet werden können.

[1] Der Graph einer Funktion ist als Menge der Wertepaare definiert. Einer verbreiteten Sprechweise folgend nennen wir die graphische Darstellung des Graphen im kartesischen Koordinatensystem jedoch ebenfalls kurz „Graph“.

FA 2 Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]

FA-M 2.1 Verbal, tabellarisch, graphisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA-M 2.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter *k* und *d* ermitteln und im Kontext deuten können

FA-M 2.3 Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

FA-M 2.4 Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können:

$$f(x+1) = f(x) + k; \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$$

FA-M 2.5 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können

FA-M 2.6 Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können

Anmerkung: Die Parameter k und d sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

FA 3 Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^z$ mit $z \in \mathbb{Z}$ bzw. $z = \frac{1}{2}$

FA-M 3.1 Verbal, tabellarisch, graphisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA-M 3.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie den Parameter *a* ermitteln und im Kontext deuten können

FA-M 3.3 Die Wirkung des Parameters a kennen und im Kontext deuten können

FA-M 3.4 Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = \frac{a}{x}$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können

Anmerkung: Wurzelfunktionen bleiben auf den quadratischen Fall $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}}$ beschränkt.

FA 4 Polynomfunktion [$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$]

FA-M 4.1 Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen

FA-M 4.2 Zwischen tabellarischen und graphischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können

FA-M 4.3 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können

FA-M 4.4 Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Anmerkung: Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen sollte für beliebige n bekannt sein, konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf

Polynomfunktionen mit n≤4.

Argumentwerte sollen aus Tabellen und Graphen, für Polynomfunktionen bis n = 2 und solchen, die sich durch einfaches Herausheben oder einfache Substitution auf quadratische Funktionen zurückführen lassen, auch aus der jeweiligen Funktionsgleichung ermittelt werden können.

FA 5 Exponentialfunktion [$f(x) = c \cdot a^x$ bzw. $f(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $c, a \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$]

FA-M 5.1 Verbal, tabellarisch, graphisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA-M 5.2 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA-M 5.3 Die Wirkung der Parameter *c* und *a* (bzw. λ) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können

FA-M 5.4 Charakteristische Eigenschaften ($f(x+1) = b \cdot f(x); [e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können

FA-M 5.5 Die Begriffe Halbwertszeit und Verdoppelungszeit kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können

FA-M 5.6 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

Anmerkung: Die Parameter a und b (bzw. eλ) sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

FA 6 Sinusfunktion, Cosinusfunktion

FA-M 6.1 Graphisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

FA-M 6.2 Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

FA-M 6.3 Die Wirkung der Parameter *a* und *b* kennen und die Parameter im Kontext deuten können

FA-M 6.4 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können

FA-M 6.5 Wissen, dass $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

FA-M 6.6 Wissen, dass gilt: [sin(x)]' = cos(x), [cos(x)]' = -sin(x)

Anmerkung: Während zur Auflösung von rechtwinkeligen Dreiecken Sinus, Cosinus und Tangens verwendet werden, beschränkt sich die funktionale Betrachtung (weitgehend) auf die allgemeine Sinusfunktion. Wesentlich dabei sind die Interpretation der Parameter (im Graphen wie auch in entsprechenden Kontexten) sowie der Verlauf des Funktionsgraphen und die Periodizität.

FA 7	**Folgen und Reihen**

FA-L 7.1 Zahlenfolgen (insbesondere arithmetische und geometrische Folgen) durch explizite und rekursive Bildungsgesetze beschreiben und graphisch darstellen können

FA-L 7.2 Zahlenfolgen als Funktionen über $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}^*$ auffassen können, insbesondere arithmetische Folgen als lineare Funktionen und geometrische Folgen als Exponentialfunktionen

FA-L 7.3 Definitionen monotoner und beschränkter Folgen kennen und anwenden können

FA-L 7.4 Grenzwerte von Folgen ermitteln können

FA-L 7.5 Folgen zur Beschreibung diskreter Prozesse in anwendungsorientierten Bereichen einsetzen können

FA 8	**Reihen**

FA-L 8.1 Den Begriff der Summe einer unendlichen Reihe definieren können

FA-L 8.2 Endliche arithmetische und geometrische Reihen kennen und ihre Summen berechnen können

FA-L 8.3 Summen konvergenter geometrischer Reihen berechnen können

Inhaltsbereich Analysis (AN)

Bildungstheoretische Orientierung

Die Analysis stellt Konzepte zur formalen, kalkulatorischen Beschreibung von diskretem und stetigem Änderungsverhalten bereit, die nicht nur in der Mathematik, sondern auch in vielen Anwendungsbereichen von grundlegender Bedeutung sind. Die Begriffe Differenzenquotient bzw. Differentialquotient sind allgemeine mathematische Mittel, dieses Änderungsverhalten von Größen in unterschiedlichen Kontexten quantitativ zu beschreiben, was in vielen Sachbereichen auch zur Bildung neuer Begriffe genutzt wird.

Im Sinne der Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen und Experten wird es daher wichtig sein, diese mathematischen Begriffe in diversen Anwendungsfällen deuten zu können, darüber hinaus aber auch allfällige Zusammenhänge von Fachbegriffen auf der Basis der hier genannten mathematischen Konzepte zu erkennen (z. B. den Zusammenhang Ladung – Stromstärke in der Physik oder allgemein den Zusammenhang von Bestands- und Flussgrößen), zu definieren oder zu benennen. Im Rahmen von höherer Allgemeinbildung sollte die Analysis somit einen wesentlichen Beitrag zu einem verständigen Umgang mit den entsprechenden Fachbegriffen leisten, der sich nicht nur auf die Kommunikation mit Expertinnen und Experten beschränkt. Manche der hier angesprochenen Begriffe werden auch umgangssprachlich gebraucht (z. B. Momentangeschwindigkeit, Beschleunigung, Zerfallsgeschwindigkeit, progressives Wachstum). Im Sinne einer Kommunikation mit der Allgemeinheit ist es für einen allgemeingebildeten Menschen daher auch wichtig, bei einer allfälligen Explikation der Fachbegriffe auf deren mathematischen Kern zurückgreifen zu können. (Was bedeutet eine „momentane“ Änderung einer bestimmten Größe?)

Der hinsichtlich der Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen und Experten zentrale Begriff der Integralrechnung ist das bestimmte Integral. Es ist wichtig zu wissen, was das dahinterstehende Konzept allgemein in der Mathematik und konkret in diversen Anwendungssituationen leistet. Daraus ergibt sich einerseits, dass man das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten in verschiedenen Kontexten deuten kann, andererseits aber auch, dass man die typischen Anwendungsfälle des bestimmten Integrals allgemein beschreiben und den Begriff selbst in verschiedenen Kontexten zur Darstellung entsprechender Zusammenhänge verwenden kann (z. B. die physikalische Arbeit als Wegintegral der Kraft).

Die mathematische Darstellung der einzelnen Begriffe ist im Allgemeinen eine symbolische, wobei die Zeichen auch eine bestimmte Bedeutung innerhalb des Kalküls haben. Für die Zugänglichkeit elementarer Fachliteratur ist ein verständiger Umgang mit diesem Formalismus notwendig, d. h. die zum Teil unterschiedlichen symbolischen Darstellungen des Differentialquotienten, der Ableitungsfunktion sowie des bestimmten Integrals sollten als solche erkannt, im jeweiligen Kontext gedeutet und auch eigenständig als Darstellungsmittel eingesetzt werden können. Es ist wichtig zu wissen, dass mit Zeichen auch gerechnet wird und was im konkreten Fall damit berechnet wird; die Durchführung der Rechnung selbst kann aber weitgehend unterbleiben. Es genügt, sich auf die einfachsten Regeln des Differenzierens zu beschränken, zumal neben der symbolischen Darstellung der Begriffe auch die graphische Darstellung der entsprechenden Funktionen zur Verfügung steht, an der die relevanten Eigenschaften und Zusammenhänge erkannt und auch quantitativ abgeschätzt werden können.

Inhaltsbereich Analysis (AN)

Grundkompetenzen

AN 1 Änderungsmaße

AN-M 1.1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können

Anmerkung: Die Berechnung einfacher Differenzenquotienten ist/wird damit auch umsetzbar/möglich.

AN-M 1.2 Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane" Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal sowie in formaler Schreibweise) auch kontextbezogen anwenden können

AN-M 1.3 Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können

AN-M 1.4 Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können

Anmerkung: Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzquotienten und durch Differentialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext. Die Ermittlung des Differentialquotienten aus Funktionsgleichungen beschränkt sich auf Polynomfunktionen, Potenzfunktionen sowie auf die Fälle $[\sin(k \cdot x)]' = k \cdot \cos(k \cdot x)$, $[\cos(k \cdot x)]' = -k \cdot \sin(k \cdot x)$ und $[e^{kx}]' = k \cdot e^{kx}$.

AN-L 1.5 Einfache Differentialgleichungen, insbesondere $y' = k \cdot y$ lösen können

AN 2 Regeln für das Differenzieren

AN-M 2.1 Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$ (vgl. Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten)

Anmerkung: Im Teil Vernetzung von Grundkompetenzen können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Differentiationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.

AN-L 2.2 Produkt-, Quotienten- und Kettenregel kennen und anwenden können

AN-L 2.3 Anhand von Bedingungen (Funktionswerte, Werte von Ableitungen) Funktionsgleichungen ermitteln können

AN-L 2.4 Einfache Extremwertaufgaben lösen können

AN 3 Ableitungsfunktion/Stammfunktion

AN-M 3.1 Den Begriff Ableitungsfunktion/Stammfunktion kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können

AN-M 3.2 Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren graphischer Darstellung (er)kennen und beschreiben können

AN-M 3.3 Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

Anmerkung: Der Begriff der Ableitung(sfunktion) soll verständig und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.

AN 4 Summation und Integral

AN-M 4.1 Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

AN-M 4.2 Einfache Regeln des Integrierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, $\int k \cdot f(x)\,dx$, $\int f(k \cdot x)\,dx$ (vgl. Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten), bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können

Anmerkung: Im Teil Vernetzung von Grundkompetenzen können mit Hilfe technologischer Werkzeuge auch komplexere Integrationsmethoden angewandt und umgesetzt werden.

AN-M 4.3 Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Anmerkung: Analog zum Differentialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral auf der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem auf der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext. Die Berechnung bestimmter Integrale soll sich auf Polynomfunktionen beschränken.

Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)

Bildungstheoretische Orientierung

Mathematiker/innen wie auch Anwender/innen bedienen sich häufig der Begriffe, der Darstellungsformen und der (grundlegenden) Verfahren der Beschreibenden Statistik, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Schließenden Statistik. Für allgemeingebildete Laien wird es im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit vor allem darauf ankommen, die stochastischen Begriffe und Darstellungen im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren und deren Aussagekraft bzw. Angemessenheit einschätzen und bewerten zu können.

Die eigenständige Erstellung von statistischen Tabellen und Grafiken wird sich auf Situationen geringer Komplexität und auf einfache Grafiken beschränken (z. B. bei der Kommunikation mit der Allgemeinheit), für die Ermittlung statistischer Kennzahlen (Zentral- und Streuungsmaße) gilt Ähnliches.

Auch bei der Wahrscheinlichkeit kann man sich auf grundlegende Wahrscheinlichkeitsinterpretationen, auf grundlegende Begriffe (Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Dichte- und Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz/Standardabweichung) und Konzepte (Binomialverteilung, Normalverteilung) sowie einfachste Wahrscheinlichkeitsberechnungen beschränken; wichtig hingegen erscheint es, Wahrscheinlichkeit als eine (vom jeweiligen Informationsstand) abhängige Modellierung und Quantifizierung des Zufalls sowie als unverzichtbares Bindeglied zwischen den beiden Statistiken zu verstehen.

Der Begriff der (Zufalls-)Stichprobe ist bereits bei der Wahrscheinlichkeit, aber natürlich auch in der Schließenden Statistik grundlegend und zentral.

Von den zwei grundlegenden Konzepten der Schließenden Statistik, dem Testen von Hypothesen und der Hochrechnung (Konfidenzintervall), ist die Hochrechnung von besonderer Bedeutung. Im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit wird es auch hier weniger darum gehen, Konfidenzintervalle zu ermitteln, sondern vorrangig darum, Ergebnisse dieses Verfahrens im jeweiligen Kontext angemessen zu deuten und zu bewerten. Dabei spielen Begriffe wie Sicherheit/Irrtumswahrscheinlichkeit und deren Zusammenhang mit der Intervallbreite („Genauigkeit“) und dem Stichprobenumfang eine zentrale Rolle, sodass entsprechende Kompetenzen unverzichtbar sind.

Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS)

Grundkompetenzen

WS 1 Beschreibende Statistik

WS-M 1.1 Werte aus tabellarischen und elementaren graphischen Darstellungen ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können

Anmerkung: (un-)geordnete Liste, Strichliste, Piktogramm, Säulen-, Balken-, Linien-, Stängel-Blatt-, Punktwolkendiagramm, Histogramm (als Spezialfall eines Säulendiagramms), Prozentstreifen, Kastenschaubild

WS-M 1.2 Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können

WS-M 1.3 Statistische Kennzahlen (absolute Häufigkeit, relative Häufigkeit, arithmetisches Mittel, Median, Modus, Quartile, Spannweite, empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext interpretieren können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können

WS-M 1.4 Definition und wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels und des Medians angeben und nutzen, Quartile ermitteln und interpretieren können, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können

Anmerkung: Wenn auch statistische Kennzahlen (für einfache Datensätze) ermittelt und elementare statistische Grafiken erstellt werden sollen, liegt das Hauptaugenmerk auf verständigen Interpretationen von Grafiken (unter Beachtung von Manipulationen) und Kennzahlen. Speziell für das arithmetische Mittel und den Median müssen die wichtigsten Eigenschaften (definitorische Eigenschaften, Datentyp-Verträglichkeit, Ausreißerempfindlichkeit) gekannt und verständig eingesetzt bzw. berücksichtigt werden. Beim arithmetischen Mittel sind allenfalls erforderliche Gewichtungen zu beachten („gewogenes arithmetisches Mittel“) und zu nutzen (Bildung des arithmetischen Mittels aus arithmetischen Mitteln von Teilmengen).

WS 2 Wahrscheinlichkeitsrechnung – Grundbegriffe

WS-M 2.1 Grundraum und Ereignisse in angemessenen Situationen verbal bzw. formal angeben können

WS-M 2.2 Relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können

WS-M 2.3 Wahrscheinlichkeit unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, Additionsregel und Multiplikationsregel anwenden und interpretieren können

Anmerkung: Die Multiplikationsregel kann unter Verwendung der kombinatorischen Grundlagen und der Anwendung der Laplace-Regel (auch) umgangen werden.

WS-M 2.4 Binomialkoeffizient berechnen und interpretieren können

WS-L 2.5 Die Begriffe „Zufallsversuch“ und „Ereignis“ kennen; wissen, dass Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können

WS-L 2.6 Sichere und unmögliche Ereignisse sowie Gegenereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten angeben können

WS-L 2.7 Methoden zur Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten kennen (relativer Anteil, relative Häufigkeit, subjektives Vertrauen)

WS-L 2.8 Bedingte Wahrscheinlichkeiten kennen, berechnen und interpretieren können

WS-L 2.9 Entscheiden können, ob ein Ereignis von einem anderen Ereignis begünstigt bzw. benachteiligt wird oder von diesem unabhängig ist

WS 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung(en)

WS-M 3.1 Die Begriffe Zufallsvariable, (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung, Erwartungswert und Standardabweichung verständig deuten und einsetzen können

WS-M 3.2 Binomialverteilung als Modell einer diskreten Verteilung kennen – Erwartungswert sowie Varianz/ Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können, Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen angeben können, Arbeiten mit der Binomialverteilung in anwendungsorientierten Bereichen

WS-M 3.3 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung modelliert werden kann

WS-M 3.4 Normalapproximation der Binomialverteilung interpretieren und anwenden können

Anmerkung: Kennen und Anwenden der Faustregel, dass die Normalapproximation der Binomialverteilung mit den Parametern n und p dann anzuwenden ist und gute Näherungswerte liefert, wenn die Bedingung $np(1-p) \geq 9$ erfüllt ist. Die Anwendung der Stetigkeitskorrektur ist nicht notwendig und daher für Berechnungen im Zuge von Prüfungsbeispielen vernachlässigbar. Kennen des Verlaufs der Dichtefunktion φ der Standardnormalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Arbeiten mit der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung und korrektes Ablesen der entsprechenden Werte.

WS-L 3.5 Mit der Normalverteilung arbeiten können, auch in anwendungsorientierten Bereichen

WS 4 Schließende/Beurteilende Statistik

WS-M 4.1 Konfidenzintervalle als Schätzung für eine Wahrscheinlichkeit oder einen unbekannten Anteil p interpretieren (frequentistische Deutung) und verwenden können, Berechnungen auf Basis der Binomialverteilung oder einer durch die Normalverteilung approximierten Binomialverteilung durchführen können

WS-L 4.2 Grundzüge des Testens von Hypothesen können